Première S | Travaux dirigés | Chap D1 – Nombre dérivé, tangente, approximations

Exercice 1 **Connaissez-vous votre cours ?** Pour chacune des phrases suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. On justifiera la réponse.
Dans la suite, f désigne une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1 Pour $h \neq 0$, le taux d'accroissement de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 1$ entre 1 et $1+h$ vaut

$$h + 2$$

2 f est dérivable en 1 donc le nombre dérivé de f en 1 vaut

$$f'(1) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

3 Si le taux d'accroissement de la fonction f entre 2 et $2+h$ est donné, pour tout réel h non nul par

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 2h^2 - 3h - 1$$

alors $f'(2) = -1$.

4 Si la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(0;3)$ est la droite d'équation $y = 2$ alors $f'(0) = 2$.

5 Si la fonction f vérifie $f(1) = -2$ et $f'(1) = 3$ alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ en son point B d'abscisse 1 a pour équation $y = 3x - 2$.

6 Si la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $C(-1;2)$ est parallèle à la droite d'équation $y = x$, alors $f'(-1) = 1$.

Exercice 2 **A propos d'une fonction affine...** Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 5$.

1) Soit h un réel non nul. Déterminer le taux d'accroissement de f entre 2 et $2+h$.
En déduire que f est dérivable en 2 et préciser le nombre dérivé $f'(2)$.
2) f est-telle dérivable en -3 ? Justifier.

Exercice 3 **Avec une fonction trinôme...** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3.$$

Démontrer que g est dérivable en 1 et déterminer le nombre dérivé $g'(1)$.

Exercice 4 **Une fonction rationnelle...** Soit h la fonction définie par

$$h(x) = \frac{x}{x+1}.$$

1) Pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle bien définie ?
2) Démontrer que h est dérivable en 3 et déterminer le nombre dérivé $f'(3)$.

Exercice 5 **A propos de quantité conjuguée...** Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{3 + x}.$$

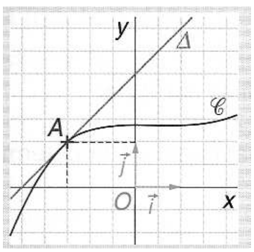
1) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est bien définie. On notera I cet intervalle dans la suite.
2) Pour tout réel non nul $h > -4$, montrer successivement les égalités suivantes

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}.$$

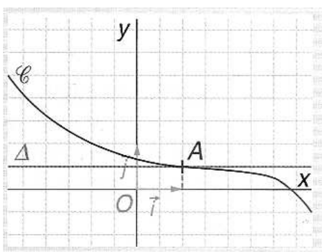
indication : pour établir la dernière égalité, on pourra multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{4+h} + 2$.
3) En déduire que f est dérivable en 1 et déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.

Exercice 6 **A propos de tangente...** Dans chacun des cas, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f et la droite Δ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point $A(a; f(a))$.
Déterminer $f'(a)$ et déterminer une équation de Δ.

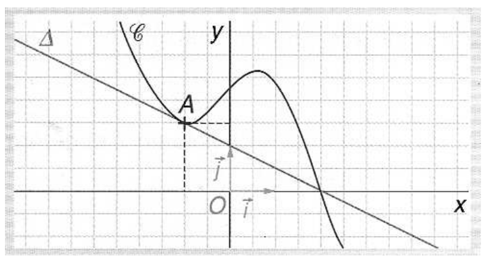
1.



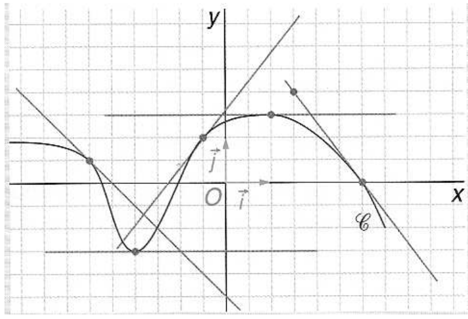
2.



3.



Exercice 7 **Lire graphiquement...**



Les droites tracées sont tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = f(x)$.

Par lecture graphique, déterminer $f(-3)$, $f'(-3)$, $f(-2)$, $f'(-2)$, $f'(-0{,}5)$, $f(3)$ et $f'(3)$.

Exercice 8 **A propos d'équations de tangentes...** Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

$$f(x) = x^2 + x \qquad a = 3 \qquad ; \qquad f(x) = \frac{1}{x-3} \qquad a = -2.$$

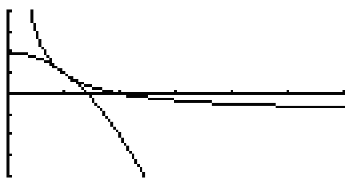
Exercice 9 **Cinématique...** Un objet est lancé verticalement vers le haut à l'instant $t = 0$. Pendant la phase ascendante, la hauteur, en mètres, de cet objet à l'instant t est donnée par

$$h(t) = 1 + 7t - 5t^2.$$

1) De quelle hauteur lance-t-on cet objet ?
2) Quelle est la hauteur maximale atteint par cet objet ? A quelle instant cette hauteur est-elle atteinte ?
3) Déterminer la vitesse instantanée de l'objet :
   (a) au moment du lancer (c'est-à-dire à l'instant $t = 0$)
   (b) lorsqu'il atteint sa hauteur maximale (à l'instant déterminé dans la deuxième question).

Exercice 10 **Construction graphique...** Construire la courbe représentative d'une fonction f vérifiant toutes les conditions suivantes :
* f est définie sur $[0; 2]$.
* $f(0) = -1$; $f(1) = 2$; $f(2) = 1$.
* f est dérivable en 0, en 1 et en 2. De plus, $f'(0) = 1$, $f'(1) = 0$ et $f'(2) = -1$.

Exercice 11 **Tangente commune ?**
Sur l'écran ci-contre, on a visualisé les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par



$$f(x) = 2 - x^2 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{2}{x} - 1.$$

Ces deux courbes semblent avoir la même tangente au point $A(1; 1)$. Qu'en est-il exactement ?

Exercice 12 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1) Déterminer une approximation affine de $f(1+h)$ pour h proche de 0.
2) On considère la fonction e définie par
$$e(h) = \frac{1}{1+h} - (1-h).$$
   (a) Ecrire $e(h)$ sous la forme d'un quotient.
   (b) En déduire que pour tout réel h vérifiant $-1/2 \leqslant h \leqslant 1/2$,
$$0 \leqslant e(h) \leqslant 2h^2.$$
   (c) Déterminer des valeurs approchées des réels
$$\frac{1}{1{,}09} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{0{,}95}$$
   en donnant un majorant de l'erreur sous la forme d'une puissance de 10.