

AP15 – APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES DÉFINIES SUR UN OUVERT DE $\mathbb{R}^n$. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Dans toute cette leçon, on considère E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, $E \cong \mathbb{R}^n$ et $F \cong \mathbb{R}^m$. U et V seront des ouverts respectifs de E et F .

1 Applications différentiables et applications C^1 -différentiables

1.1 Notion de différentielle

Définition 1.1 (Différentiabilité) Soit $H : U \rightarrow F$ une application et $a \in U$ fixé. Alors, l'application H sera dite différentiable au point a s'il existe une application linéaire $L : E \rightarrow F$ telle que

$$H(x) = H(a) + L(x - a) + o_a(\|x - a\|)$$

i.e.

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{H(x) - H(a) - L(x - a)}{\|x - a\|} = \vec{0}_F.$$

Proposition 1.2 Si H est différentiable en $a \in U$ alors

- 1) l'application linéaire L est unique. On la notera dans la suite $DH(a)$.
- 2) H est continue au point a .

REMARQUE – L'application linéaire $DH(a)$ est continue dans notre cadre (dimension finie). De plus comme toutes les normes sont équivalentes, la valeur de $DH(a)$ ne dépend pas des normes choisies sur E et F . $\diamond$

Exemple 1 Soit $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$. Déterminer $DH(a_1, a_2)(v_1, v_2)$.

Proposition 1.3 Si l'application H s'écrit $H : x \mapsto H(x) = (H_1(x), \dots, H_n(x))$ alors

H est différentiable en a

$\Updownarrow$

$\forall i \in [1, n]$ les applications H_i sont dérivables en a

1.2 Dérivée directionnelle, dérivée partielle

On considère E_1 un s.e.v de E et $U_1 := \{v \in E_1 : a + v \in U\}$.

Définition 1.4 (Dérivée directionnelle) On dit que H est différentiable au point a dans la direction de E_1 si l'application

$$\begin{aligned} U_1 &\rightarrow F \\ v &\mapsto H(a + v) \end{aligned}$$

soit différentiable à l'origine. La différentielle de H en a dans la direction de E_1 est une application linéaire de E_1 dans F .

Considérons le cas où $E = \mathbb{R}^n$ doté de la base canonique $\{e_1, \dots, e_n\}$. Soit $i \in [1, n]$ alors on définit la i -ème dérivée partielle de H au point a comme la dérivée de H en a dans la direction de e_i . Elle sera notée $\partial_i H(a) \in F$.

Proposition 1.5 Soit $i \in [1, n]$. Si H est différentiable au point $a \in U \subset E = \mathbb{R}^n$, alors la i -ème dérivée partielle en a , $\partial_i H(a)$ existe et on a

$$\partial_i H(a) = (DH(a))(e_i)$$

et donc si $h = (h_1, \dots, h_n) \in E$, on a

$$DH(a)(h) = \sum_{i=1}^n h_i (DH(a))(e_i).$$

REMARQUE – La réciproque est fautive comme le montre le contre-exemple

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto H(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

$\diamond$

1.3 Différentielle et opérations, propriétés des différentielles

Proposition 1.6 Soient H_1 et H_2 deux applications de U dans F toutes deux différentiables en a . Alors,

- 1) $H_1 + H_2$ est différentiable en a et $D(H_1 + H_2)(a) = DH_1(a) + DH_2(a)$;
- 2) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λH_1 est différentiable en a et $D(\lambda H_1)(a) = \lambda DH_1(a)$.

Proposition 1.7 (Différentielle de la composée) Soient E, F et G des $\mathbb{R}$ -e.v.n., U, V des ouverts respectifs de E et F et $H : U \subset E \rightarrow F$ et $K : V \subset F \rightarrow G$ deux applications vérifiant $H(U) \subset V$. Si H est différentiable en $a \in U$ et K différentiable en $H(a)$, alors $H \circ K : U \rightarrow G$ est différentiable en a et on a

$$D(H \circ K)(a) = DH(K(a)) \circ DK(a) \in \mathcal{L}(E, G).$$

Proposition 1.8 Soit $H : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ une application bilinéaire. Alors, quels que soient $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$ et $(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$ on a

$$(DH(a_1, a_2))(v_1, v_2) = H(a_1, v_2) + H(v_1, a_2).$$

Corollaire 1.9 Soit $H_1, H_2 : U \subset E \rightarrow F$ différentiables. Alors, si $a \in U$ et $v \in E$, on a

$$(D(H_1 H_2)(a)).v = (DH_1(a).v)H_2(a) + H_1(a)(DH_2(a).v).$$

1.4 Applications C^1 -différentiables et formule de la moyenne

Définition 1.10 On dit que H est de classe C^1 sur U si, quel que soit $a \in U$, H est différentiable en a et que l'application

$$\begin{aligned} DH : U &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x &\mapsto DH(x) \end{aligned}$$

est continue.

Théorème 1.11 $H : U \subset E \rightarrow F$ est de classe C^1 sur U si et seulement si quel que soit $i \in [1, m]$, les applications

$$\begin{aligned} U &\rightarrow F \\ x &\mapsto (DH(x)).e_i = \partial_i H(x) \end{aligned}$$

existent et sont continues sur U .

Théorème 1.12 Soit $H : U \subset E \rightarrow F$, où E et F sont deux e.v.n. et U un ouvert de E . Soit $(a, b) \in U^2$ tel que le segment $[a, b]$ soit inclus dans U . Si H est continue sur $[a, b]$, différentiable en tout point de $]a, b[$ et s'il existe $M > 0$ tel que $\|DH(c)\| \leq M$ pour tout $c \in]a, b[$, alors

$$\|H(b) - H(a)\| \leq M\|b - a\|.$$

Corollaire 1.13 Soit $U \subset E$ ouvert **connexe**. Si quel que soit $a \in U$, $DH(a) = 0 \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $H : U \rightarrow F$ est constante.

Corollaire 1.14 Soit U un ouvert **convexe** de E . On suppose qu'il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall x \in U \quad \|DH(x)\| \leq M$$

alors H est M -lipschitzienne i.e.

$$\forall x, y \in U \quad \|H(x) - H(y)\| \leq M\|x - y\|.$$

2 Différentielle d'ordre supérieures, formules de Taylor

2.1 Différentielle seconde

Définition 2.1 Soit $H : U \subset E \rightarrow F$ est dite de classe C^2 si l'application $DH : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est de classe C^1 . Dans ce cas,

$$\begin{aligned} D^2 H := D(DH) : U &\rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) \cong \mathcal{L}(E \times E, F) \\ a &\mapsto D^2 H(a) \end{aligned}$$

Proposition 2.2 Soit $H : U \subset E \rightarrow F$ avec $\dim E = m$, $\dim F = n$. H est de classe C^2 sur U si et seulement si

- 1) $\forall i \in [1, m], \forall k \in [1, n], \partial_i H_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ existe
- 2) $\forall i, j \in [1, m], \forall k \in [1, n], \partial_i(\partial_j H_k) : U \rightarrow \mathbb{R}$ existe et est continue.

Proposition 2.3 (Lemme de Schwarz) Soit $H : U \subset E \rightarrow F$ de classe C^2 alors $\forall a \in U, \forall v, w \in E$,

$$D^2 H(a)(v, w) = D^2 H(a)(w, v)$$

i.e.

$$\forall a \in U, \forall i, j, \quad \partial_i(\partial_j H)(a) = \partial_j(\partial_i H)(a).$$

2.2 Différentielle multiple et formules de Taylor

Définition 2.4 Soit $H : U \subset E \rightarrow F$. H est dite de classe C^k si DH est de classe C^{k-1} . H est de classe C^0 si H est continue. Enfin, l'application H est dite de classe C^∞ si $H \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(U, F)$.

Proposition 2.5 (Taylor avec reste intégral) Soit $H : U \subset E \rightarrow F$ de classe C^k . Alors, pour tout $a \in U$ et $a + h \in U$

$$\begin{aligned} H(a + h) &= H(a) + DH(a)v + \dots \\ &\quad + \frac{1}{(k-1)!} D^{k-1} H(a)(v, \dots, v) \\ &\quad + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} D^k H(a + th)(v, \dots, v). \end{aligned}$$

Proposition 2.6 (Taylor-Young) Soit $H : U \subset E \rightarrow F$ de classe C^k . Alors, pour tout $a \in U$ et $a + h \in U$

$$\begin{aligned} H(a + h) &= H(a) + DH(a)v + \dots \\ &\quad + \frac{1}{k!} D^k H(a)(v, \dots, v) + o(\|v\|^k) \end{aligned}$$

3 Application à la recherche d'extrema dans le cas des fonctions à valeurs réelles

3.1 Extrema locaux

3.2 Extrema liés